Листок 5. Теория Струн

(Сканы/фото решений данного листка принимаются
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

В данном листке мы будем считать различные величины в свободных конформных теориях. Основными инструментами при этом являются операторные разложения и теорема Вика. Напомним сначала про операторные разложения. Смысл их достаточно прост: если два поля близки к друг другу, то мы можем разложить их в ряд Лорана по базису полей

$$\Phi_i(z)\Phi_j(w) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{ij}^n(z-w)\Phi_n(w), \tag{0.1}$$

где Φ_n — базис свободных полей, $C_{ij}^n(z)$ — некоторые функции называемые структурными константами. При это это разложение верно, если в круге радиуса $|z-w|$ вокруг точки w нет других полей кроме Φ_i, Φ_j. В конформной теории поля можно показать, что в силу скейлинг-инвариантности структурные константы имеют следующий вид

$$C_{ij}^n(z-w) = (z-w)^{\Delta_n - \Delta_i - \Delta_j}\widetilde{C}_{ij}^n, \tag{0.2}$$

где $\widetilde{C}_{ij}^n$ — некоторые комплексные числа. В свободных теориях для вычисления операторных разложений пользуются теоремой Вика.

Задача 1. Теория свободного бозона.

(а). В теории свободного бозона имеется одно поле $\phi(z)$, которое имеет следующую корреляционную функцию

$$\langle \phi(z)\phi(w)\rangle = -\ln(z-w). \tag{0.3}$$

Соответственно по теореме Вика

$$\phi(z)\phi(w) = \overbracket{\phi(z)\phi}(w) + :\phi(z)\phi(w):. \tag{0.4}$$

Используя $\overbracket{\phi(z)\phi}(w) = -\ln(z-w)$, и раскладывая $:\phi(z)\phi(w):$ по степеням $(z-w)$ найдите полное операторное разложение $\phi(z)\phi(w)$. Оставляя только сингулярную часть покажите, что

$$\phi(z)\phi(w) = -\ln(z-w) + \ldots, \tag{0.5}$$

где точки обозначают регулярные члены.

(б). Посчитайте все операторные разложения операторов

$$\partial\phi(z), \quad :e^{ik\phi(z)}:, \quad T(z) = -\frac{1}{2}:\partial\phi\partial\phi:(z) \tag{0.6}$$

с друг другом и самих с собой. Для вычисления операторных разложений с участием $:e^{k\phi(z)}:$, используйте его определение

$$:e^{k\phi(z)}: := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik)^n}{n!}:(\phi(z))^n:. \tag{0.7}$$

Пример. Чтобы вам было проще разобраться, мы подробно рассмотрим пример разложения $T(z)$ с самим собой.

$$T(z)T(w) = \frac{1}{4} : \partial\phi(z)\partial\phi(z) :: \partial\phi(w)\partial\phi(w) : . \tag{0.8}$$

Используя теорему Вика, мы получим (напомним, что по теореме Вика мы должны всеми возможными способами сливать поля с друг другом. При слиянии происходит замена по формуле (0.4). Также поля находящиеся под одним знаком нормального упорядочения сливать не нужно)

$$\begin{aligned} : \partial\phi(z)\partial\phi(z) :: \partial\phi(w)\partial\phi(w) :&= 2 : \partial\phi(z)\partial\phi(z)\partial\phi(w)\partial\phi(w) : + 4 : \partial\phi(z)\partial\phi(z)\partial\phi(w)\partial\phi(w) + \\ &+ : \partial\phi(z)\partial\phi(z)\partial\phi(w)\partial\phi(w) :, \end{aligned} \tag{0.9}$$

где $2, 4$ — комбинаторные факторы. Заменяя по формуле $\phi(z)\phi(w) = -\ln(z-w)$, получим

$$: \partial\phi(z)\partial\phi(z) :: \partial\phi(w)\partial\phi(w) := \frac{2}{(z-w)^4} - \frac{4}{(z-w)^2} : \partial\phi(z)\partial\phi(w) : + \dots \tag{0.10}$$

где мы как обычно опустили регулярную часть. Последний шаг — это разложить $\phi(z)$ по степеням $z-w$:

$$: \partial\phi(z)\partial\phi(z) :: \partial\phi(w)\partial\phi(w) := \frac{2}{(z-w)^4} - \frac{4}{(z-w)^2} : \partial\phi(w)\partial\phi(w) : - \frac{4}{z-w} : \partial^2\phi(w)\partial\phi(w) : + \dots . \tag{0.11}$$

Вспомнив теперь, что $T(z) = -\frac{1}{2} : \partial\phi(z)\partial\phi(z) :$ и соответственно $\partial T(z) = - : \partial^2\phi(z)\partial\phi(z) :$, получим

$$T(z)T(w) = \frac{1}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \dots . \tag{0.12}$$

(в). В конформной теории поля поле $\Phi(z)$ называется примарным если оно имеет следующее операторное разложение с тензором энергии импульса:

$$T(z)\Phi(w) = \frac{\Delta}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial\Phi(w) + \dots, \tag{0.13}$$

где Δ называется конформной размерностью поля $\Phi(z)$. Покажите, что в теории свободного бозона поля $\partial\phi(z)$ и $: e^{k\phi(z)} :$ являются примарными и найдите их конформные размерности.

(г). В конформной теории поля операторное разложение тензора энергии импульса с самим собой имеет вид

$$T(z)T(w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial T(z) + \dots, \tag{0.14}$$

где c называется центральным зарядом теории. Найдите его в случае свободного бозона.

(д). Будем считать, что наш бозон живет на окружности длинны L. Напомним, что в конформной теории поля обычно используются комплексные координаты. Переход к комплексным координатам от времени τ и координаты x происходит по формуле $z = e^{2\pi(\tau - ix)/L}$. В стандартных курсах квантовой теории поля показывается, что операторы в корреляционных функциях должны быть T-упорядоченными, т.е. в корреляторе $\langle \dots \phi(x_1, \tau_1)\phi(x_2, \tau_2) \dots \rangle$, должно быть $\tau_1 > \tau_2$. При замене $z = e^{2\pi(\tau - ix)/L}$ упорядочение по времени переходит в радиальное упорядочение, т.е. в корреляторе $\langle \dots \phi(z, \bar{z})\phi(w, \bar{w}) \dots \rangle$ должно быть $|z| > |w|$.

В двумерной конформной теории поля сохраняющиеся токи удовлетворяют уравнению $\bar{\partial} j(z, \bar{z}) = 0$. Решение соответствующего уравнения это $j(z, \bar{z}) = j(z)$, т.е. ток является голоморфной функцией. Соответствующий сохраняющийся заряд дается формулой

$$Q = \oint_{|z|=R} \frac{dz}{2\pi i} j(z), \tag{0.15}$$

где интегрирование происходит по кругу фиксированного радиуса. Радиус круга R является "временем" применения оператора. Этому соответствует следующая физическая картина. Моменту времени $\tau = -\infty$ (in-состояние) соответствует точка $z = 0$. Вставка полей в круг $|z| = R$ соответствует рождению частиц. Соответствующий интеграл (0.15) по формуле Коши высадится на вычеты в операторном разложении тока $j(z)$ с этими полями. Т.е. он высадится на сумму зарядов всех частиц, которые родились до момента времени R. Допустим теперь, что у нас есть два оператора

$$Q_1 = \oint \frac{dz}{2\pi i} j_1(z), \quad Q_2 = \oint \frac{dz}{2\pi i} j_2(z). \tag{0.16}$$

Найдем их коммутатор

$$[Q_1, Q_2] = Q_1 Q_2 - Q_2 Q_1 = \oint_{|z|=R_1} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{|w|=R_2} \frac{dw}{2\pi i} j_1(z) j_2(w) - \oint_{|w|=R_1} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{|z|=R_2} \frac{dz}{2\pi i} j_2(w) j_1(z), \tag{0.17}$$

где $R_1 > R_2$. В этом выражение важны контуры интегрирования. Расписывая произведение $Q_1 Q_2$, мы учли что оператор Q_2 действует раньше чем оператор Q_1, поэтому контур интегрирования для его тока лежит внутри. Соответственно в слагаемом $Q_2 Q_1$ контура располагаются наоборот. Используя голоморфность подынтегральных выражений, преобразуйте второй интеграл в первый. При перетаскивании контура интеграл зацепится за особенность при $z \to w$. В итоге вы должны получить

$$[Q_1, Q_2] = \oint_{|w|=R_2} \frac{dw}{2\pi i} \mathrm{Res}_{z \to w}(j_1(z) j_2(w)), \tag{0.18}$$

т.е. коммутатор двух зарядов дается вычетом (или коэффициентом при z^{-1} в операторном разложении) соответствующих токов. Используя это, найдите коммутатор операторов $a_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \, i\partial\phi$. Вы должны получить

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}. \tag{0.19}$$

Найдите также коммутационные соотношения для $L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+2} T(z)$.

Задача 2. Теория свободного фермиона. В теории свободного фермиона имеется одно антикоммутирующие поле $\psi(z)$. Оно имеет следующие операторное разложение

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z - w} + \dots . \tag{0.20}$$

Не забывайте, поле $\psi(z)$ является антикоммутирует с самим собой. Следите за знаками!

(а). Используя операторное разложение, найдите коммутационные соотношения для мод b_r оператора $\psi(z)$

$$\psi(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} b_r z^{-r-1/2}. \tag{0.21}$$

(б). Используя тензор энергии импульса данной теории $T(z) = -\frac{1}{2} : \psi\partial\psi : (z)$, покажите, что поле $\psi(z)$ является примарным, а также найдите его конформную размерность и центральный заряд теории.

(в). Рассмотрим теорию, в которой имеются два фермиона $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$. Удобно вмести их линейную комбинации $\Psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(z) + i\psi_2(z))$ и $\bar{\Psi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(z) - i\psi_2(z))$. Тогда мы получим следующие операторные разложения

$$\begin{aligned} &\Psi(z)\bar{\Psi}(w) = \frac{1}{z-w} + \dots, \\ &\Psi(z)\Psi(w) = \dots, \quad \bar{\Psi}(z)\bar{\Psi}(w) = \dots, \end{aligned} \tag{0.22}$$

а тензор энергии импульса примет вид

$$T(z) = \frac{1}{2} : \Psi\partial\bar{\Psi} : (z) + \frac{1}{2} : \bar{\Psi}\partial\Psi : (z). \tag{0.23}$$

Убедитесь в том, что поля $: e^{i\phi(z)} :$ и $: e^{-i\phi(z)} :$ в теории свободного бозона ведут себя так же как $\Psi(z)$ и $\bar{\Psi}(z)$ соответственно. А именно убедитесь в том, что они имеют нужные конформные размерности, удовлетворяют тем же операторным разложениям. Наконец убедитесь, что после подстановки $\Psi(z) =: e^{i\phi(z)} :$ и $\bar{\Psi}(z) =: e^{-i\phi(z)} :$ тензор энергии импульса фермионов преобразуется в тензор энергии импульса бозона.

Задача 3. ***b*-*c* духи.** В теории $b-c$ духов имеются два фермионных поля $b(z)$ и $c(z)$. Их операторные разложения

$$\begin{aligned} &b(z)c(w) = \frac{1}{z-w} + \dots, \\ &c(z)c(w) = \dots, \quad b(z)b(w) = \dots. \end{aligned} \tag{0.24}$$

(а). Используя операторное разложение, найдите коммутационные соотношения для мод b_n и c_n операторов $b(z)$ и $c(z)$

$$b(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^{-n-2}, \quad c(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^{-n+1}. \tag{0.25}$$

(б). Используя тензор энергии импульса данной теории

$$T(z) =: (\partial b)c : (z) - 2\partial(: bc :)(z), \tag{0.26}$$

покажите, что поля $b(z)$ и $c(z)$ является примарными, а также найдите их конформные размерности и центральный заряд теории.

Задача 4. Деформированная теория свободного бозона. Рассмотрим деформированную теорию свободного бозона $\phi(z)$, которое имеет тоже операторное разложение:

$$\phi(z)\phi(w) = -\ln(z-w) + \dots, \tag{0.27}$$

однако, с другим тензором энергии импульса $T(z) = -\frac{1}{2} : \partial\phi\partial\phi : (z) - i\lambda\partial^2\phi$.

(а). Найдите центральный заряд теории. Покажите, что поля $\partial\phi(z)$ и $: e^{k\phi(z)} :$ являются примарными и найдите их конформные размерности.

(б). Покажите, что теория свободного бозона с тензором энергии импульса

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \partial\phi\partial\phi : (z) - i\frac{3}{2}\partial^2\phi \tag{0.28}$$

эквивалентна системе b-c духов с соответствиями $b(z) =: e^{i\phi(z)} :$ и $c(z) =: e^{-i\phi(z)} :$. Для этого проверьте совпадение операторных разложений, конформных размерностей и тензора энергии импульса.

Задача 5. β-γ духи. В теории β-γ духов имеются два бозонных поля $\beta(z)$ и $\gamma(z)$. Их операторные разложения

$$\begin{aligned} \beta(z)\gamma(w) &= -\frac{1}{z-w} + \dots, \\ \gamma(z)\gamma(w) &= \dots, \quad \beta(z)\beta(w) = \dots. \end{aligned} \tag{0.29}$$

(а). Используя операторное разложение, найдите коммутационные соотношения для мод β_r и γ_r операторов $\beta(z)$ и $\gamma(z)$:

$$\beta(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} \beta_r z^{-r-3/2}, \quad \gamma(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} \gamma_r z^{-n+1/2}. \tag{0.30}$$

(б). Используя тензор энергии импульса данной теории

$$T(z) =: (\partial\beta)\gamma : (z) - \frac{3}{2}\partial(:\beta\gamma:)(z), \tag{0.31}$$

покажите, что поля $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ является примарными, а также найдите их конформные размерности и центральный заряд теории.

(б). β-γ система уже состоит из бозонов. Однако, в теории струн удобно выразить ее через другие два бозона $\phi(z)$ и $\chi(z)$ по следующим формулам

$$\begin{aligned} \beta &=: e^{-\phi+\chi}\partial\chi :, \\ \gamma &=: e^{\phi-\chi} :, \end{aligned} \tag{0.32}$$

где $\phi(z)$ и $\chi(z)$ — два независимых бозона с операторными разожениями

$$\begin{aligned} \phi(z)\phi(w) &= -\ln(z-w) + \dots, \\ \chi(z)\chi(w) &= \ln(z-w) + \dots. \end{aligned} \tag{0.33}$$

Причем тензора энергии импульса этих полей имеют вид

$$\begin{aligned} T_\phi(z) &= -\frac{1}{2} : \partial\phi\partial\phi : (z) - 2\partial^2\phi(z), \\ T_\chi(z) &= \frac{1}{2} : \partial\chi\partial\chi : (z) + \frac{1}{2}\partial^2\chi(z). \end{aligned} \tag{0.34}$$

Проверьте совпадение операторных разложений, конформных размерностей и тензора энергии импульса при соответствии (0.32).